RING *STRONGLY* k-ENGEL π-REGULER

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:

AFIDA LAILI NURI W.

125090400111023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN

RING *STRONGLY* k-ENGEL π-REGULER

oleh:
Afida Laili Nuri W.
125090400111023

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 26 Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, MS.
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Afida Laili Nuri W.**
NIM	**: 125090400111023**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Ring *Strongly* k-Engel π-reguler**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai referensi,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia mananggung segala risiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Juli 2018
Yang menyatakan,

Afida Laili Nuri W.
NIM. 125090400111023

RING *STRONGLY* k-ENGEL π-REGULER

ABSTRAK

Ring π-regular merupakan salah satu pengembangan konsep pada struktur aljabar. Suatu elemen x disebut *strongly* π-regular jika terdapat suatu bilangan bulat positif n dan elemen $z \in R$ sedemikian sehingga $x^{n+1}z = x^n = zx^{n+1}$. Jika setiap elemen di R merupakan *strongly* π-regular, maka R disebut *strongly* π-regular. Suatu elemen $(x, y) \in R \times R$ disebut *strongly* k-Engel π-regular jika terdapat suatu bilangan bulat positif n dan elemen $z \in R$ sedemikian sehingga $z[x, y]_k^{n+1} = [x, y]_k^n = [x, y]_k^{n+1}z$. Jika setiap elemen di R merupakan *strongly* k-Engel π-regular, maka R disebut *strongly* k-Engel π-regular.

Kata kunci: reguler, π-reguler kiri, π-reguler kanan, *strongly* π-reguler, k-Engel, k-Engel π-reguler kiri, k-Engel π-reguler kanan, *strongly* k-Engel π-reguler.

STRONGLY k-ENGEL π-REGULAR RINGS

ABSTRACT

Stongly π-regular ring is one of concept development in algebra structure. An element x is said to be strongly π-regular if there exists a positif integer n and element $z \in R$ such that $x^{n+1}z = x^n = zx^{n+1}$. If every element in R is strongly π-regular, then R is said to be strongly π-regular. An element $(x, y) \in R \times R$ is said to strongly k-Engel π-regular if there exists a positif integer n and element $z \in R$ such that $z[x, y]_k^{n+1} = [x, y]_k^n = [x, y]_k^{n+1}z$. If every element in R is strongly k-Engel π-regular, then R is said to be strongly k-Engel π-regular.

Keywords: regular, left π-regular, right π-regular, strongly π-regular, k-Engel, left k-Engel π-regular, right k-Engel π-regular, strongly k-Engel π-regular.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan petunjuk, kemudahan, serta rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Ring *Strongly* *k*-Engel *π*-regular”**. Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Ari Andari, MS. selaku pembimbing akademik dan dosen pembimbing, atas segala bimbingan, ilmu dan motivasi yang diberikan kepada penulis.
2. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji atas saran dan bimbingan dalam proses pengerjaan skripsi ini.
3. Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku dosen penguji atas saran dan bimbingan dalam proses pengerjaan skripsi ini.
4. Seluruh dosen jurusan matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
5. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu mendukung, memberi semangat, serta mendoakan penulis.
6. Anis Yulia, Widya Karina, Nur Khumairoh dan teman-teman Program Studi Matematika atas segala motivasi dan dukungannya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Kritik dan saran dapat disampaikan melalui email ke alamat afidalailinuri20@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi berbagai pihak.

Malang, 26 Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$*$	Sebarang operasi biner
$\bullet$	Operasi pergandaan biasa
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$-$	Operasi pengurangan biasa
i	Akar kuadrat dari -1
$\in$	Elemen atau anggota
$\notin$	Bukan anggota
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\emptyset$	Himpunan kosong
$S \times S$	Hasil kali kartesius dari S ke S
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner atau lebih. Beberapa contoh dari struktur aljabar adalah grup dan ring. Grup merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dengan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Sedangkan ring merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dua operasi biner dengan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Dalam perkembangannya, teori ring memiliki berbagai perluasan, salah satunya adalah ring *strongly* π-reguler. Suatu ring dikatakan *strongly* π-reguler jika setiap elemennya merupakan *strongly* π-reguler. Konsep ini diperkenalkan oleh Azumaya pada tahun 1954 pada jurnalnya yang berjudul *Strongly* π*-regular Rings*.

Berbagai penelitian mengenai ring *strongly* π-reguler terus dikembangkan. Melalui jurnalnya yang berjudul *On Commutativity in Strongly* k*-Engel* π*-regular Rings* pada tahun 2012, Chin dan Sahebi mengembangkan teori ring *strongly* π-reguler pada ring yang memenuhi keadaan k-Engel. Selanjutnya, teori ini disebut dengan teori ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Pada tahun 2013, Chin dan Sahebi mengembangkan teori *strongly* k-Engel π-reguler pada Ring Abelian atau ring komutatif. Teori ini ditulis dalam jurnalnya yang berjudul *A Note on Abelian Strongly* k*-Engel* π*-regular Rings*. Oleh karena itu, pada skripsi ini dibahas tentang definisi, proposisi, lemma, teorema serta bukti yang berkaitan dengan ring *strongly* k*-Engel* π-reguler.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, berikut rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana proposisi, lemma dan teorema yang berkaitan dengan ring *strongly* k-Engel π-reguler?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, berikut adalah tujuan dari skripsi ini.

1. Membahas dan membuktikan proposisi, lemma dan teorema yang berkaitan dengan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi serta contoh yang digunakan sebagai materi pendukung dalam pembahasan.

2.1 Operasi Biner

Pada subbab ini dibahas mengenai definisi operasi biner, sifat komutatif, asosiatif, distributif, elemen identitas, dan invers berdasarkan Ehrlich (1991), dan Hillman dan Alexanderson (1994).

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner)
Misalkan S merupakan suatu himpunan tak kosong. Operasi biner atau operasi tertutup pada himpunan S didefinisikan

$$* : S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \mapsto *\,(a, b) = a * b.$$

Definisi 2.1.2 (Komutatif)
Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong S dikatakan komutatif jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku

$$a * b = b * a.$$

Definisi 2.1.3 (Asosiatif)
Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong S dikatakan asosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Definisi 2.1.4 (Distributif)
Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong S.

1. Operasi biner $*$ dikatakan distributif kiri terhadap operasi $\circ$ jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku
$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c).$$
2. Operasi biner $*$ dikatakan distributif kanan terhadap operasi $\circ$ jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku
$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c).$$

Definisi 2.1.5 (Elemen identitas)
Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong S. Suatu elemen $e \in S$ disebut elemen identitas atau elemen satuan jika untuk setiap $a \in S$ berlaku

$$e * a = a = a * e.$$

Definisi 2.1.6 (Invers)
Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong S yang memiliki elemen satuan e. Suatu elemen $a \in S$ memiliki invers jika terdapat $h \in S$ sedemikian sehingga berlaku

$$h * a = e = a * h.$$

Dalam hal ini, h merupakan invers dari a yang dinotasikan a^{-1}.

2.2 Grup

Grup adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada subbab ini dibahas mengenai definisi dan contoh dari grup, semigrup dan grup komutatif berdasarkan Hillman dan Alexanderson (1994), dan Jacobson (1951).

Definisi 2.2.1 (Grup)
Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. $(G,*)$ disebut grup terhadap suatu operasi biner $*$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. G tertutup terhadap operasi biner $*$.
   Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Asosiatif.
   Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku
   $$(a * b) * c = a * (b * c).$$
3. Memiliki elemen identitas.
   Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku
   $$a * e = a = e * a.$$
4. Setiap elemen memiliki invers.
   Untuk setiap $a \in G$, terdapat $h \in G$ sedemikian sehingga berlaku
   $$a * h = e = h * a.$$

Contoh 2.2.2

Diberikan suatu himpunan $G = \{1, -1, i, -i\}$. Akan ditunjukkan bahwa G merupakan grup terhadap operasi pergandaan ($\bullet$).

Bukti:

Tabel 2.1 Hasil operasi pergandaan pada G

$\bullet$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	-1	i	1	-1

Dari Tabel 2.1 dapat diperoleh bahwa:

1. G tertutup terhadap operasi pergandaan.
   Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a \bullet b \in G$.
2. Memenuhi sifat asosiatif.
   Ambil $a, b, c \in G$ dengan $a = 1$, $b = -1$ dan $c = i$, sehingga diperoleh
   $$a \bullet (b \bullet c) = 1 \bullet (-1 \bullet i) = -i = (1 \bullet -1) \bullet i = (a \bullet b) \bullet c.$$
   Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in G$.
3. Terdapat elemen identitas.
   Terdapat $e = 1 \in G$, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku
   $$a \bullet 1 = a = 1 \bullet a.$$
4. Setiap elemen memiliki invers, yaitu
   invers dari 1 adalah $1 \in G$,
   invers dari -1 adalah $-1 \in G$,
   invers dari i adalah $-i \in G$,
   invers dari $-i$ adalah $i \in G$.

Terbukti bahwa $(G, \bullet)$ merupakan grup.

Definisi 2.2.3 (Semigrup)

Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong. $(S, *)$ disebut semigrup terhadap suatu operasi biner $*$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. S tertutup terhadap operasi biner $*$. Untuk setiap $a, b \in G$ maka berlaku $a * b \in G$.
2. Berlaku sifat asosiatif. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Contoh 2.2.4

Diberikan $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli dengan operasi biner $(*)$ yang didefinisikan

$$a * b = a + b + ab.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N},*)$ merupakan semigrup.

Jawab

1. Tertutup.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$. Karena $a + b \in \mathbb{N}$ dan $ab \in \mathbb{N}$, sehingga
   $$a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}.$$
2. Asosiatif.
   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, sehingga
   $$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= (a + b + ab) * c \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\mathbb{N},*)$ merupakan semigrup.

Contoh 2.2.5

Diberikan suatu himpunan bilangan bulat modulo 6 yaitu $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6,\bullet)$ merupakan semigrup.

Bukti:

Tabel 2.2 Hasil operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

1. Berdasarkan Tabel 2.2 dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6,\bullet)$ memenuhi sifat tertutup.

2. Berlaku sifat asosiatif. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$, dengan $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$ dan $c = \bar{3}$.
$$(a \bullet b) \bullet c = (\bar{1} \bullet \bar{2}) \bullet \bar{3} = \bar{1} \bullet (\bar{2} \bullet \bar{3}) = a \bullet (b \bullet c)$$

Dengan cara yang sama, berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$.
Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ merupakan semigrup.

Definisi 2.2.6 (Grup Komutatif)
Misalkan G merupakan grup dengan operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup komutatif atau Grup Abelian jika memenuhi sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Contoh 2.2.7
Diberikan suatu himpunan bilangan bulat modulo 6 $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup komutatif.
Bukti:

Tabel 2.3 Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

1. $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.
   Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, dengan $\bar{a} = a + 6k_1$, $\bar{b} = b + 6k_2$, dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh
$$\bar{a} + \bar{b} = (a + 6k_1) + (b + 6k_2)$$
$$= a + b + 6(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}_6.$$

2. Memenuhi sifat asosiatif.
   Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6$, dengan $\bar{a} = a + 6k_1$, $\bar{b} = b + 6k_2$, $\bar{c} = c + 6k_3$, dan $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh
$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (a + 6k_1 + b + 6k_2) + (c + 6k_3)$$

$$= a + b + c + 6(k_1 + k_2 + k_3)$$
$$= a + 6k_1 + (b + 6k_2 + c + 6k_3)$$
$$= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$

3. Memiliki elemen identitas.
   Terdapat $e = \bar{0} = 0 + 6k_1 \in \mathbb{Z}_6$, sehingga untuk setiap $\bar{a} = a + 6k_2 \in \mathbb{Z}_6$ berlaku
   $$\bar{a} + \bar{0} = a + 6k_2 + 0 + 6k_1$$
   $$= a + 6k_1$$
   $$= \bar{a}$$
4. Setiap elemen memiliki invers.
   Berdasarkan Tabel 2.3, berikut adalah invers dari setiap elemen di $\mathbb{Z}_6$.
   Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
   invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{5} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$,
   invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$,
   invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$,
   invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$, dan
   invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{1} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$.
5. Memenuhi sifat komutatif.
   Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, dengan $\bar{a} = a + 6k_1$ dan $\bar{b} = b + 6k_2$ maka
   $$\bar{a} + \bar{b} = (a + 6k_1) + (b + 6k_2)$$
   $$= (b + 6k_2) + (a + 6k_1)$$
   $$= \bar{b} + \bar{a}$$

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup komutatif atau grup Abelian.

2.3 Ring

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada subbab ini dibahas mengenai definisi dan contoh dari ring, ring dengan elemen satuan dan ring komutatif berdasarkan Andari (2014).

Definisi 2.3.1 (Ring)
Suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\bullet)$, disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(R, \bullet)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku hukum distributif.

   $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ untuk setiap $a, b, c \in R$, dan

   $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Selanjutnya, operasi pergandaan biasa $a \bullet b$ cukup ditulis dengan ab.

Contoh 2.3.2
Diberikan suatu himpunan bilangan bulat modulo 6 yaitu $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan ring.
Bukti:

1. Berdasarkan Contoh 2.2.7 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup komutatif.
2. Berdasarkan Contoh 2.2.5 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ merupakan semigrup.
3. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_6$ memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. Ambil $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \in \mathbb{Z}_6$, dengan $\bar{a} = a + 6k_1$, $\bar{b} = b + 6k_2$, $\bar{c} = c + 6k_3$, dan $a, b, c,\ k_1, k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) &= (a + 6k_1)\big((b + 6k_2) + (c + 6k_3)\big) \\
&= (a + 6k_1)\ (b + c + 6(k_2 + k_3)) \\
&= (a + 6k_1)b + (a + 6k_1)c + (a + 6k_1)6(k_2 + k_3) \\
&= (a + 6k_1)b + (a + 6k_1)6(k_2 + k_3) + (a + 6k_1)c \\
&= (a + 6k_1)b + (a + 6k_1)6k_2 + \\
&\quad\ (a + 6k_1)6k_3 + (a + 6k_1)c \\
&= (a + 6k_1)(b + 6k_2) + (a + 6k_1)(c + 6k_3) \\
&= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}.
\end{aligned}$$

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = ((a+6k_1)+(b+6k_2))(c+6k_3)$$
$$= (a+b+6(k_1+k_2))(c+6k_3)$$
$$= a(c+6k_3)+b(c+6k_3)+6(k_1+k_2)(c+6k_3)$$
$$= a(c+6k_3)+6k_1(c+6k_3)+6k_2(c+6k_3)$$
$$+b(c+6k_3)$$
$$= (a+6k_1)(c+6k_3)+(b+6k_2)(c+6k_3).$$
$$= \bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

Terbukti $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan ring.

Definisi 2.3.3 (Ring dengan Elemen Satuan)
Misal R merupakan ring. Jika terdapat $e \in R$ sedemikian sehingga berlaku $ea = a = ae$ untuk setiap $a \in R$, maka R disebut ring dengan elemen satuan.

Contoh 2.3.4
Diberikan $D_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(D_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan ring dengan elemen satuan.
Bukti:
1. Akan dibuktikan bahwa $D_2(\mathbb{Z})$ grup komutatif terhadap penjumlahan. Ambil $A, B, C \in D_2(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$.
   (i) Tertutup.
   $$A + B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & 0 \\ 0 & b+q \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z}).$$
   (ii) Berlaku Sifat asosiatif.
   $$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix} a+p & 0 \\ 0 & b+q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix} a+p+r & 0 \\ 0 & b+q+s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+r & 0 \\ 0 & q+s \end{bmatrix}$$

$$= A + (B + C)$$

(iii) Memiliki elemen identitas, yaitu $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(iv) Setiap elemen memiliki invers. Invers dari A yaitu $-A = -\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z})$.

Terbukti $(D_2(\mathbb{Z}), +)$ merupakan grup komutatif.

2. Akan dibuktikan bahwa $D_2(\mathbb{Z})$ semigrup terhadap pergandaan.

(i) Tertutup.

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & bq \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z}).$$

(ii) Asosiatif.

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & bq \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} apr & 0 \\ 0 & bqs \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} pr & 0 \\ 0 & qs \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)$$

$$= A(BC)$$

Terbukti $(D_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ merupakan semigrup.

3. Akan dibuktikan $D_2(Z)$ memenuhi sifat distributif.

$$
\begin{aligned}
A(B+C) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p+r & 0 \\ 0 & q+s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(p+r) & 0 \\ 0 & b(q+s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ap+ar & 0 \\ 0 & bq+bs \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & bq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ar & 0 \\ 0 & bs \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\
&= AB + AC.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+p & 0 \\ 0 & b+q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ar+pr & 0 \\ 0 & bs+qs \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ar & 0 \\ 0 & bs \end{bmatrix}\begin{bmatrix} pr & 0 \\ 0 & qs \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\
&= AC + BC.
\end{aligned}
$$

Terbukti $D_2(\mathbb{Z})$ memenuhi sifat distributif.

4. Terhadap pergandaan, $D_2(\mathbb{Z})$ memiliki elemen satuan atau elemen identitas, yaitu $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Terbukti bahwa $(D_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan ring dengan elemen satuan.

Definisi 2.3.5 (Ring Abelian)
Misalkan R merupakan ring. Jika pada R berlaku sifat komutatif, yaitu $ab = ba$ untuk setiap $a \in R$, maka R disebut Ring Abelian atau ring komutatif.

Contoh 2.3.6
Diberikan himpunan matriks diagonal $D_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(D_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan ring Abelian.
Bukti:
1. Berdasarkan Contoh 2.3.4 telah dibuktikan bahwa $(D_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan ring dengan elemen satuan.
2. Akan dibuktikan $D_2(\mathbb{Z})$ bersifat komutatif terhadap pergandaan.

   Ambil $A, B \in D_2(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$ sehingga

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ap & 0 \\ 0 & bq \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pa & 0 \\ 0 & qb \end{bmatrix} \\ &= BA. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(D_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan ring Abelian.

Contoh 2.3.7
Diberikan himpunan matriks $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(M_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$ bukan merupakan Ring Abelian.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{R}),+)$ merupakan grup komutatif.

   Ambil $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$.

   (i) Tertutup.

   $$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+f & b+g \\ c+h & d+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

   (ii) Asosiatif

   $$\begin{aligned}(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+f & b+g \\ c+h & d+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+f+j & b+g+k \\ c+h+l & d+i+m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f+j & g+k \\ h+l & i+m \end{bmatrix} \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

   (iii) Memiliki elemen identitas $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sedemikian sehingga untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{R})$ berlaku $A + I = A$.

   (iv) Setiap elemen memiliki invers.

   Invers dari A yaitu $-A = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$, sedemikian sehingga $A + (-A) = I$.

   Terbukti $(M_2(\mathbb{R}), +)$ merupakan grup komutatif.

2. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{R}),\bullet)$ merupakan semigrup.

   (i) Tertutup.

   $$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} af+bh & ag+bi \\ cf+dh & cg+di \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

(ii) Bersifat asosiatif.

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} af + bh & ag + bi \\ cf + dh & cg + di \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} afj + bhj + agl + bil & afk + bhk + agm + bim \\ cfj + dhj + cgl + dil & cfk + dhk + cgm + dim \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} fj + gl & fk + gm \\ hj + il & hk + im \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}\right)$$

$$= A(BC)$$

3. Akan dibuktikan pada $M_2(\mathbb{R})$ berlaku sifat distributif.

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f + j & g + k \\ h + l & i + m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} af + aj + bh + bl & ag + ak + bi + bm \\ cf + cj + dh + dl & cg + ck + di + dm \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} af + bh & ag + bi \\ cf + dh & cg + di \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aj + bl & ak + bm \\ cj + dl & ck + dm \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

$= AB + AC$, dan

$$(A + B)C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + f & b + g \\ c + h & d + i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aj + fj + bl + gl & ak + fk + bm + gm \\ cj + hj + dl + il & ck + hk + dm + im \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aj + bl & ak + bm \\ cj + dl & ck + dm \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} fj + gl & fk + gm \\ hj + il & hk + im \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$
$$= AC + BC.$$

4. Tidak berlaku komutatif.

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} af + bh & ag + bi \\ cf + dh & cg + di \end{bmatrix}$$
$$\neq \begin{bmatrix} af + cg & bf + dg \\ ah + ci & bh + di \end{bmatrix}$$
$$\neq \begin{bmatrix} f & g \\ h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\neq BA$$

Terbukti $M_2(\mathbb{R})$ merupakan ring, namun bukan merupakan Ring Abelian.

2.4 Idempoten

Beberapa elemen pada ring memiliki sifat-sifat tertentu. Elemen-elemen tersebut dikelompokkan berdasarkan sifat-sifatnya, seperti elemen idempoten, idempoten *central*, nilpoten, unit, dan pembagi nol. Pada subbab ini dibahas mengenai definisi dan contoh dari idempoten, idempoten *central*, nilpoten, unit, dan pembagi nol berdasarkan Andari (2014) dan Tucci (2000).

Definisi 2.4.1 (Idempoten)
Misalkan R merupakan ring. Elemen $a \in R$ disebut idempoten jika dan hanya jika berlaku $a^2 = a$.
Selanjutnya, himpunan elemen idempoten pada ring R dapat dinotasikan sebagai $Id(R)$.

Contoh 2.4.2
Akan ditunjukkan elemen-elemen idempoten di $\mathbb{Z}_6$.
Jawab:
Pada Contoh 2.3.2 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan ring.
Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ diperoleh

1. Untuk $a = \bar{0}$, $a^2 = \bar{0}^2 = \bar{0} = a$
2. Untuk $a = \bar{1}$, $a^2 = \bar{1}^2 = \bar{1} = a$
3. Untuk $a = \bar{2}$, $a^2 = \bar{2}^2 = \bar{4} \neq a$
4. Untuk $a = \bar{3}$, $a^2 = \bar{3}^2 = \bar{3} = a$
5. Untuk $a = \bar{4}$, $a^2 = \bar{4}^2 = \bar{4} = a$
6. Untuk $a = \bar{5}$, $a^2 = \bar{5}^2 = \bar{1} \neq a$

Berdasarkan Definisi 2.4.1, elemen-elemen idempoten di $\mathbb{Z}_6$ adalah $Id(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

Definisi 2.4.3 (Idempoten *central*)
Misalkan R merupakan ring dan elemen a merupakan idempoten di R. Elemen a disebut idempoten *central* jika untuk setiap $r \in R$ berlaku $ar = ra$.
Selanjutnya, himpunan elemen idempoten *central* pada ring R dapat dinotasikan sebagai $C\big(Id(R)\big)$.

Contoh 2.4.4
1. Akan ditentukan bahwa setiap idempoten di $\mathbb{Z}_6$ merupakan idempoten *central*.
2. Akan ditentukan bahwa setiap idempoten di $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan idempoten *central*.

Jawab:
1. Berdasarkan Contoh 2.3.5, $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring komutatif, sehingga untuk $\forall a \in Id(\mathbb{Z}_6)$ dan dan $r \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $ar = ra$. Jadi elemen idempoten *central* di $\mathbb{Z}_6$ adalah $C(Id(\mathbb{Z}_6)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$.
2. Beberapa ontoh idempoten di $M_2(\mathbb{R})$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan idempoten *central*, karena untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ berlaku $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sedangkan Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bukan merupakan idempoten *central*, karena tidak berlaku komutatif, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.4.5 (Nilpoten)
Misalkan a elemen di R. Elemen a disebut nilpoten jika dan hanya jika terdapat suatu n bilangan bulat positif sedemikian sehingga $a^n = 0$.
Selanjutnya, himpunan elemen nilpoten pada ring R dapat dinotasikan sebagai $N(R)$.

Contoh 2.4.6
Akan ditunjukkan elemen-elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_6$.
Jawab:
Berdasarkan Contoh 2.3.2, $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan ring. Untuk $a \in \mathbb{Z}_6$ dan n adalah bilangan bulat positif, maka

1. untuk $a = \bar{0}$ terdapat $n = 1,$ sehingga $a^1 = \bar{0}$,
2. untuk $a = \bar{1}$, tidak terdapat n sehingga $\bar{1}^n = \bar{0}$,
3. untuk $a = \bar{2}$, tidak terdapat n sehingga $\bar{2}^n = \bar{0}$,
4. untuk $a = \bar{3}$, tidak terdapat n sehingga $\bar{3}^n = \bar{0}$,
5. untuk $a = \bar{4}$, tidak terdapat n sehingga $\bar{4}^n = \bar{0}$, dan
6. untuk $a = \bar{5}$, tidak terdapan n sehingga $\bar{5}^n = \bar{0}$.

Berdasarkan Definisi 2.4.3, elemen-elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_6$ adalah $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$.

Definisi 2.4.7 (Unit)
Misalkan R merupakan ring dengan elemen satuan e dan $a \in R$. Jika terdapat $a_1 \in R$ sehingga $a_1 a = e = a a_1$, maka a_1 disebut invers dari a dengan notasi a^{-1}. Suatu elemen $a \in R$ yang memiliki invers disebut unit atau elemen uniter.

Contoh 2.4.8
Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$. Akan ditentukan unit atau elemen uniter di $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$.
Jawab:

1. Berdasarkan Tabel 2.2, pada $\mathbb{Z}_6$ terdapat elemen satuan terhadap operasi pergandaan yaitu $e = \bar{1}$.
2. Akan ditunjukkan unit pada $\mathbb{Z}_5$
   Untuk $a, a_1 \in \mathbb{Z}_6$ diperoleh sebagai berikut.
   $a = \bar{0}$ bukan unit, karena tidak terdapat a_1 sehingga $a a_1 = \bar{1}$.
   $a = \bar{1}$ unit, karena terdapat $a_1 = \bar{1}$ sehingga $a a_1 = \bar{1}.\bar{1} = \bar{1}$.
   $a = \bar{2}$ bukan unit, karena tidak terdapat a_1 sehingga $a a_1 = \bar{1}$.

$a = \bar{3}$ bukan unit, karena tidak terdapat a_1 sehingga $aa_1 = \bar{1}$.
$a = \bar{4}$ bukan unit, karena tidak terdapat a_1 sehingga $aa_1 = \bar{1}$.
$a = \bar{5}$ unit, karena terdapat $a_1 = \bar{5}$ sehingga $aa_1 = \bar{5}.\bar{5} = \bar{1}$.

Sehingga unit atau elemen uniter pada $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{\bar{1}, \bar{5}\}$.

2.5 Ideal

Pada subbab ini dibahas mengenai definisi dan contoh dari ideal, nil ideal, ring faktor dan ideal prima berdasarkan Andari (2014) dan Bresar (2014).

Definisi 2.5.1 (Ideal)
Misalkan R adalah ring. $M \subseteq R$ dan $M \neq \emptyset$.
Mdisebut ideal kiri jika dan hanya jika
1. $\forall a, b \in M$ maka berlaku $a - b \in M$, dan
2. $\forall a \in M, r \in R$ maka berlaku $ra \in M$.

Mdisebut ideal kanan jika dan hanya jika
1. $\forall a, b \in M$ maka berlaku $a - b \in M$, dan
2. $\forall a \in M, r \in R$ maka berlaku $ar \in M$.

Jika $ar \in M$ dan $ra \in M$, M disebut ideal dua sisi atau ideal.

Contoh 2.5.2
Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ dan $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{Z}_6$. Akan dibuktikan bahwa
1. $I_1 = \{\bar{0}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.
2. $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti:
1. Akan dibuktikan bahwa $I_1 = \{\bar{0}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.4 Hasil operasi pengurangan pada I_1

$-$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$

(i) Berdasarkan Tabel 2.4 terbukti untuk $\forall a, b \in I_1$ maka berlaku $a - b \in I_1$.

Tabel 2.5 Hasil operasi pergandaan I_1 terhadap $\mathbb{Z}_6$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

(ii) Berdasarkan Tabel 2.5 terbukti untuk $\forall a \in I_1, r \in \mathbb{Z}_6$ maka $ar \in I_1$ dan $ra \in I_1$.

Terbukti I_1 merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

2. Akan dibuktikan bahwa $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.6 Hasil operasi pengurangan pada I_2

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

(i) Berdasarkan Tabel 2.6 terbukti untuk $\forall a, b \in I_2$ maka berlaku $a - b \in I_2$.

Tabel 2.7 Hasil operasi pergandaan I_2 terhadap $\mathbb{Z}_6$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$

(ii) Berdasarkan Tabel 2.7 terbukti untuk $\forall a \in I_2, r \in \mathbb{Z}_6$ maka $ar \in I_2$ dan $ra \in I_2$.

Terbukti I_2 merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.5.3 (Nil Ideal)

Misalkan R merupakan ring. Suatu ideal I pada ring R disebut nil ideal jika setiap $x \in I$ merupakan elemen nilpoten.

Contoh 2.5.4

Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$. I_1 dan I_2 merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$, dengan $I_1 = \{\bar{0}\}$ dan $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan dibuktikan bahwa:

1. I_1 merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$.
2. I_2 bukan merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.4.6, elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_6$ adalah $N(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}\}$, sehingga:

1. $I_1 = \{\bar{0}\}$ merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$ karena setiap elemen pada I_1 merupakan elemen nilpoten.
2. $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ bukan merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$ karena terdapat elemen pada I_2 yang bukan merupakan elemene nilpoten, yaitu $\bar{2}$ dan $\bar{4}$.

Definisi 2.5.5 (Ring Faktor)
Misalkan R adalah ring dan I adalah ideal di R. $R/I = \{r + I | r \in R\}$ yang didefinisikan:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = (ab) + I$$
$$-(a + I) = -a + I, \text{ dengan } a, b \in R.$$

Dengan operasi tersebut, maka R/I disebut ring faktor.

Contoh 2.5.6
Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditentukan ring faktor $\mathbb{Z}_6/I_2$.
Jawab:
Berdasarkan Contoh 2.5.2, $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_6$.
$\bar{0} + I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$\bar{1} + I_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$
$\bar{2} + I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$\bar{3} + I_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$
$\bar{4} + I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$\bar{5} + I_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$.
Sehingga $\mathbb{Z}_6/I_2$ merupakan ring faktor, dengan $\mathbb{Z}_6/I_2 = \{\bar{0} + I_2, \bar{1} + I_2\}$.

Definisi 2.5.7 (Ideal Prima)
Misalkan R adalah ring, himpunan A, B, P adalah ideal di R, dan $a \in A, b \in B$. P disebut ideal prima jika memenuhi:

Jika $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

Contoh 2.5.8
Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ dan $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa I_2 merupakan ideal prima.

Jawab:
Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}_6$. Untuk $a, b \notin I_2$, diperoleh:
$a = \overline{1}$ dan $b = \overline{1}$, diperoleh $ab = \overline{1} \notin I_2$,
$a = \overline{1}$ dan $b = \overline{3}$, diperoleh $ab = \overline{3} \notin I_2$,
$a = \overline{1}$ dan $b = \overline{5}$, diperoleh $ab = \overline{5} \notin I_2$,
$a = \overline{3}$ dan $b = \overline{1}$, diperoleh $ab = \overline{3} \notin I_2$,
$a = \overline{3}$ dan $b = \overline{3}$, diperoleh $ab = \overline{3} \notin I_2$,
$a = \overline{3}$ dan $b = \overline{5}$, diperoleh $ab = \overline{3} \notin I_2$.
$a = \overline{5}$ dan $b = \overline{1}$, diperoleh $ab = \overline{5} \notin I_2$,
$a = \overline{5}$ dan $b = \overline{3}$, diperoleh $ab = \overline{3} \notin I_2$, dan
$a = \overline{5}$ dan $b = \overline{5}$, diperoleh $ab = \overline{1} \notin I_2$.
Jika $a \notin I_2$ dan $b \notin I_2$, maka $ab \notin I_2$. Sehingga terbukti bahwa I_2 merupakan ideal prima.

2.6 *Strongly* π-reguler dan k-Engel

Berikut adalah definisi dan contoh dari reguler, *strongly* reguler, *strongly* π-reguler, dan k-Engel berdasarkan Azumaya (1954), Chin dan Sahebi (2012), dan Chin dan Sahebi (2013).

Definisi 2.6.1 (Reguler)
Misalkan R merupakan ring. Suatu elemen $x \in R$ disebut reguler jika terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $x = xyx$.
Jika setiap elemen di R merupakan elemen reguler, maka R disebut ring reguler.

Contoh 2.6.2
Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring reguler.
Jawab:
Untuk $x \in \mathbb{Z}_6$, terdapat $y \in \mathbb{Z}_6$ sehingga diperoleh sebagai berikut.

Tabel 2.8 Elemen reguler pada $\mathbb{Z}_6$

x	y	xyx
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0} \bullet \overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1} \bullet \overline{1} \bullet \overline{1} = \overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2} \bullet \overline{2} \bullet \overline{2} = \overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{3} \bullet \overline{1} \bullet \overline{3} = \overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4} \bullet \overline{4} \bullet \overline{4} = \overline{4}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5} \bullet \overline{5} \bullet \overline{5} = \overline{5}$

Berdasarkan Tabel 2.8, untuk setiap elemen $x \in \mathbb{Z}_6$, terdapat $y \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $x = xyx$. **S**etiap elemen $x \in \mathbb{Z}_6$ merupakan elemen reguler, sehingga $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring reguler.

Definisi 2.6.3 (*Strongly* reguler)
Misalkan R merupakan ring.
1. Suatu elemen $x \in R$ disebut reguler kiri jika terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $x = yxx$.
2. Suatu elemen $x \in R$ disebut reguler kanan jika terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $x = xxy$.

Jika $x \in R$ merupakan elemen reguler kiri dan reguler kanan, maka x merupakan elemen *strongly* reguler. Jika setiap elemen di R merupakan elemen *strongly* reguler, maka R disebut ring *strongly* reguler. Selanjutnya, penulisan xx dapat ditulis sebagai x^2.

Contoh 2.6.4
Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring *strongly* reguler.
Jawab:
Untuk $x \in \mathbb{Z}_6$, terdapat $y \in \mathbb{Z}_6$ sehingga diperoleh sebagai berikut.

Tabel 2.9 Elemen *strongly* reguler pada $\mathbb{Z}_6$

x	y	yx^2	x^2y
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} \bullet \bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}$	$\bar{0} \bullet \bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \bullet \bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1}$	$\bar{1} \bullet \bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2} \bullet \bar{2} \bullet \bar{2} = \bar{2}$	$\bar{2} \bullet \bar{2} \bullet \bar{2} = \bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \bullet \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{3}$	$\bar{3} \bullet \bar{3} \bullet \bar{1} = \bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4} \bullet \bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{4}$	$\bar{4} \bullet \bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5} \bullet \bar{5} \bullet \bar{5} = \bar{5}$	$\bar{5} \bullet \bar{5} \bullet \bar{5} = \bar{5}$

Berdasarkan Tabel 2.9, untuk setiap elemen $x \in \mathbb{Z}_6$, terdapat $y \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $yx^2 = x = x^2y$. Setiap elemen $x \in \mathbb{Z}_6$ merupakan elemen *strongly* reguler, sehingga $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring *strongly* reguler.

Definisi 2.6.5 (*Strongly* π-reguler)
Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas.
1. Suatu $x \in R$ disebut π-reguler kiri jika terdapat suatu bilangan bulat positif n dan $y \in R$ sedemikian sehingga $x^n = yx^{n+1}$. Jika

setiap elemen di R merupakan π-reguler kiri, maka R disebut ring π-reguler kiri.

2. Suatu $x \in R$ disebut π-reguler kanan jika terdapat suatu bilangan bulat positif n dan $y \in R$ sedemikian sehingga $x^n = x^{n+1}y$. Jika setiap elemen di R merupakan π-reguler kanan, maka R disebut ring π-reguler kanan.

Jika $x \in R$ merupakan elemen π-reguler kiri dan π-reguler kanan, maka x merupakan elemen *strongly* π-reguler. Jika setiap elemen di R merupakan elemen *strongly* π-reguler, maka R disebut ring *strongly* π-reguler.

Contoh 2.6.6

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan merupakan ring *strongly* π-reguler.

Bukti:

Untuk $x \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $y \in \mathbb{Z}_6$ dan n bilangan bulat positif, sehingga diperoleh sebagai berikut.

$x = \overline{0},\ n = 1$ dan $y = \overline{0}$ sehingga $\overline{0}^1 = \overline{0}^2 \bullet \overline{0} = \overline{0} \bullet \overline{0}^2$.
$x = \overline{1},\ n = 1$ dan $y = \overline{1}$ sehingga $\overline{1}^1 = \overline{1}^2 \bullet \overline{1} = \overline{1} \bullet \overline{1}^2$.
$x = \overline{2},\ n = 2$ dan $y = \overline{3}$ sehingga $\overline{2}^2 = \overline{2}^3 \bullet \overline{3} = \overline{3} \bullet \overline{2}^3$.
$x = \overline{3},\ n = 1$ dan $y = \overline{2}$ sehingga $\overline{3}^1 = \overline{3}^2 \bullet \overline{2} = \overline{2} \bullet \overline{3}^2$.
$x = \overline{4},\ n = 1$ dan $y = \overline{4}$ sehingga $\overline{4}^1 = \overline{4}^2 \bullet \overline{4} = \overline{4} \bullet \overline{4}^2$.
$x = \overline{5},\ n = 1$ dan $y = \overline{4}$ sehingga $\overline{4}^1 = \overline{4}^2 \bullet \overline{4} = \overline{4} \bullet \overline{4}^2$.

Karena untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$, terdapat bilangan bulat positif terkecil n dan $y \in \mathbb{Z}_6$ sehingga berlaku $x^n = x^{n+1}y = yx^{n+1}$, maka terbukti $\mathbb{Z}_6$ merupakan merupakan *strongly* π-reguler.

Definisi 2.6.7 (k-Engel)

Misalkan R adalah ring. Jika $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ adalah barisan dari elemen R dan k adalah bilangan bulat positif. $[x_1, \dots, x_{k+1}]$ dapat didefinisikan sebagai berikut

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$$

$$= (x_1x_2 - x_2x_1)x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1)$$

$$[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] = [[x_1, \dots, x_k], x_{k+1}].$$

Jika $x_1 = x$ dan $x_2 = \cdots = x_{k+1} = y$, maka $[x, y]_k$ digunakan untuk menotasikan $[x_1, \dots, x_{k+1}]$. $[x, y]_k$ memenuhi kondisi k-Engel jika $[x, y]_k = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.
Selanjutnya, untuk $k = 1$, $[x, y]_k = [x, y]_1$ dapat dinotasikan sebagai $[x, y]$.

Contoh 2.6.8
Diberikan himpunan bilangan bulat modulo enam $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan bahwa:
1. $\mathbb{Z}_6$ memenuhi kondisi Engel untuk $k = 2$ dan $k = 3$.
2. $\mathbb{Z}_6$ memenuhi kondisi Engel untuk $\forall k \in \mathbb{N}$

Bukti:
1. Ambil $x, y \in \mathbb{Z}_6$. Misalkan $x = \bar{2}$ dan $y = \bar{5}$, sehingga
   Untuk $k = 2$ diperoleh:
$$\begin{aligned}
[x, y]_2 &= [\bar{2}, \bar{5}]_2 \\
&= [\bar{2}, \bar{5}, \bar{5}] \\
&= [[\bar{2}, \bar{5}], \bar{5}] \\
&= [\bar{0}, \bar{5}] \\
&= \bar{0}.\bar{5} - \bar{5}.\bar{0} \\
&= \bar{0} - \bar{0} \\
&= \bar{0}
\end{aligned}$$
   Untuk $k = 3$ diperoleh:
$$\begin{aligned}
[x, y]_3 &= [\bar{2}, \bar{5}]_3 \\
&= [\bar{2}, \bar{5}, \bar{5}, \bar{5}] \\
&= [[\bar{2}, \bar{5}, \bar{5}], \bar{5}] \\
&= [[\bar{2}, \bar{5}]_2, \bar{5}] \\
&= [\bar{0}, \bar{5}] \\
&= \bar{0}.\bar{5} - \bar{5}.\bar{0} \\
&= \bar{0} - \bar{0} \\
&= \bar{0}
\end{aligned}$$
2. Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dengan $\bar{x} = x + 6k_1, \bar{y} = y + 6k_2$ dan $x, y, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dengan menggunakan induksi matematika akan ditunjukkan bahwa $[\bar{x}, \bar{y}]_k = 0$ berlaku untuk $\forall k \in \mathbb{N}$.

Untuk $k = 1$ diperoleh

$$[\bar{x}, \bar{y}] = [x + 6k_1, y + 6k_2]$$
$$= (x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)$$
$$= xy + 6k_2x + 6k_1y + 36k_1k_2 -$$
$$(xy + 6k_1y + 6k_2x + 36k_1k_2)$$
$$= 0 \text{ (Benar)}$$

Untuk $k = n$ diperoleh

$$[\bar{x}, \bar{y}]_n = [x + k_1, y + k_2]_n$$
$$= 0 \text{ (Diasumsikan benar)}$$

Untuk $k = n + 1$ diperoleh

$$[\bar{x}, \bar{y}]_{n+1} = [[x + k_1, y + k_2]_n, \bar{y}]$$
$$= [0, \bar{y}]$$
$$= [0, y + k_2]$$
$$= 0.(y + k_2) - (y + k_2).0$$
$$= 0$$

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ memenuhi kondisi k-Engel untuk $\forall k \in \mathbb{N}$.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini diberikan definisi, proposisi, lemma, bukti, serta contoh yang menunjukkan sifat-sifat dari ring *strongly* k-Engel π-reguler.

3.1 Ring *Strongly* k-Engel π-reguler

Berikut adalah definisi dan contoh dari ring *strongly* k-Engel π-reguler berdasarkan Chin dan Sahebi (2013).

Definisi 3.1.1 (Ring *Strongly* k-Engel π-reguler)
Misalkan R merupakan ring dan $(x, y) \in R \times R$.

1. Suatu elemen (x, y) disebut k-Engel π-reguler kanan jika terdapat bilangan bulat positif n dan $z \in R$ sedemikian sehingga $([x, y]_k)^n = ([x, y]_k)^{n+1}z$. Jika setiap elemen pada $R \times R$ merupakan k-Engel π-reguler kanan, maka R disebut ring k-Engel π-reguler kanan.
2. Suatu elemen (x, y) disebut k-Engel π-reguler kiri jika terdapat bilangan bulat positif n dan $z \in R$ sedemikian sehingga $([x, y]_k)^n = z.([x, y]_k)^{n+1}$ Jika setiap elemen pada $R \times R$ merupakan k-Engel π-reguler kiri, maka R disebut ring k-Engel π-reguler kiri.

Jika R merupakan ring k-Engel π-reguler kanan dan kiri, maka R disebut ring *strongly* k-Engel π-reguler.
Selanjutnya, $([x, y]_k)^n$ cukup ditulis $[x, y]_k^n$.

Contoh 3.1.2
Akan ditunjukkan bahwa ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan suatu ring *strongly* k-Engel π-reguler untuk $k = 1$.
Jawab:
Ambil $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, $\bar{x} = x + k_1$, $\bar{y} = y + k_2$ dimana $x, y, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}[\bar{x}, \bar{y}]^n &= [(x + 6k_1), (y + 6k_2)]^n \\ &= ((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1))^n\end{aligned}$$

$$= \left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^n.$$
$$\left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^1.$$
$$\left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^{-1}$$
$$= [\bar{x}, \bar{y}]^n . [\bar{x}, \bar{y}]^1 . \bar{z}$$
$$= [\bar{x}, \bar{y}]^{n+1} . \bar{z}$$

dengan $\bar{z} = \left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^{-1}$, dan

$$[\bar{x}, \bar{y}]^n = [(x + 6k_1), (y + 6k_2)]^n$$
$$= ((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1))^n$$
$$= \left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^{-1}.$$
$$\left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^n.$$
$$\left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^1$$
$$= \bar{z}. [\bar{x}, \bar{y}]^n . [\bar{x}, \bar{y}]^1$$
$$= \bar{z}. [\bar{x}, \bar{y}]^{n+1}$$

dengan $\bar{z} = \left((x + 6k_1)(y + 6k_2) - (y + 6k_2)(x + 6k_1)\right)^{-1}$.

Maka terbukti bahwa ring $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ merupakan suatu ring *strongly* k-Engel π-reguler untuk $k = 1$.

Berikut adalah proposisi, lemma, bukti, dan contoh yang berkaitan dengan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Proposisi 3.1.3

Diberikan R suatu Ring Abelian. Jika R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler dan $N(R)$ merupakan nil ideal dari R, maka $[x, y]_k + N(R)$ merupakan ring *strongly* reguler untuk setiap $x, y \in R$.

Bukti:

R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler, maka $\forall x, y \in R$ terdapat bilangan bulat positif n dan $z \in R$ sedemikian sehingga

$$[x,y]_k^n = [x,y]_k^{n+1} z \text{ dan } [x,y]_k^n = z[x,y]_k^{n+1}.$$

Misalkan $a = [x,y]_k\,.z$ merupakan elemen idempoten di R, sehingga

$$a = a^n = [x,y]_k^n . z^n.$$

Akan dibuktikan bahwa $(1-a)$ merupakan elemen idempoten.

$$\begin{aligned}(1-a)^2 &= 1 - 2a + a^2\\ &= 1 - 2a + a\\ &= 1 - a \in Id(R).\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $(1-a)[x,y]_k$ merupakan elemen nilpoten.

$$\begin{aligned}\big((1-a)[x,y]_k\big)^n &= (1-a)^n . [x,y]_k^n\\ &= (1-a)[x,y]_k^n\\ &= [x,y]_k^n - a.[x,y]_k^n\\ &= [x,y]_k^n - [x,y]_k\,.z.[x,y]_k^n\\ &= [x,y]_k^n - [x,y]_k\,.[x,y]_k^n.z\\ &= [x,y]_k^n - [x,y]_k^{n+1}.z\\ &= 0\end{aligned}$$

Misalkan $N(R)$ merupakan nil ideal dari ring R. Akan dibuktikan bahwa $[x,y]_k + N(R)$ merupakan *strongly* reguler.

$$\begin{aligned}[x,y]_k + N(R) &= a.[x,y]_k + N(R)\\ &= [x,y]_k^n.z^n.[x,y]_k + N(R)\\ &= [x,y]_k^{n+1}.z^n + N(R)\\ &= [x,y]_k^2.[x,y]_k^{n-1}.z^n + N(R)\\ &= ([x,y]_k + N(R))^2.\Big([x,y]_k^{n-1}.z^n + N(R)\Big).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $[x,y]_k + N(R)$ merupakan *strongly* reguler.

Contoh 3.1.4
Diberikan ring *strongly* k-Engel π-reguler $\mathbb{Z}_6$ dan $I_1 = \{\bar{0}\}$ merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa $[\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1$ merupakan *strongly* reguler untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$.
Jawab:
Berdasarkan Contoh 2.6.7, ring $\mathbb{Z}_6$ memenuhi kondisi k-Engel, sehingga $[\bar{x}, \bar{y}]_k = \{\bar{0}\}$ untuk $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ dan $k \in \mathbb{N}$.
Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen pada $[\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1$ merupakan elemen *strongly* reguler.
$[\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1 = \{\bar{0}\}$

Untuk $\bar{a} = \bar{0} \in [\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1$, terdapat $\bar{b} = \bar{0} \in [\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}(\bar{a})^2 . \bar{b} &= (\bar{0})^2 . \bar{0} \\ &= \bar{0} . \bar{0} \\ &= \bar{0} \\ &= \bar{a}, \text{ dan} \\ \bar{b} . (\bar{a})^2 &= (\bar{0})^2 . \bar{0} \\ &= \bar{0} \\ &= \bar{a}.\end{aligned}$$

Terbukti $[\bar{x}, \bar{y}]_k + I_1$ merupakan ring *strongly* reguler, sehingga merupakan ring reguler.

Lemma 3.1.5
Misalkan R suatu ring dan N merupakan nil ideal dari R, maka idempoten dari R/N merupakan idempoten dari R.
Bukti:
Misalkan $a^2 - a \in N$. Akan ditentukan elemen $x \in R$ sedemikian sehingga terdapat suatu elemen $e = a + x(1 - 2a)$ yang merupakan elemen idempoten di R.

$$\begin{aligned}e^2 - e &= \left(a + x(1 - 2a)\right)^2 - (a + x(1 - 2a)) \\ &= x^2(4a^2 - 4a + 1) - x(4a^2 - 4a + 1) + (a^2 - a) \\ &= (x^2 - x)(4a^2 - 4a + 1) + (a^2 - a) = 0\end{aligned}$$

Misalkan $y = a^2 - a \in N$ sehingga diperoleh

$$= (x^2 - x)(4y + 1) + y = 0.$$

Diperoleh $x = \frac{1}{2}\left(1 - (1 + 4y)^{-\frac{1}{2}}\right)$, sehingga e juga merupakan idempoten di R.

Contoh 3.1.6

Diberikan suatu ring $\mathbb{Z}_6$ dan $I_1 = \{\bar{0}\}$ merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa idempoten dari $\mathbb{Z}_6/I_1$ merupakan idempoten dari $\mathbb{Z}_6$.

Jawab:

Berikut adalah elemen-elemen pada ring faktor $\mathbb{Z}_6/I_1$.

$$\mathbb{Z}_6/I_1 = \left\{\bar{0} + I_1, \bar{1} + I_1, \bar{2} + I_1, \bar{3} + I_1, \bar{4} + I_1, \bar{5} + I_1\right\}.$$

Elemen-elemen idempoten pada ring faktor $\mathbb{Z}_6/I_1$ yaitu

$$Id(\mathbb{Z}_6/I_1) = \{\bar{0} + I_1, \bar{1} + I_1, \bar{3} + I_1, \bar{4} + I_1\}.$$

Berdasarkan Contoh 2.4.1, elemen idempoten dari $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Terbukti bahwa idempoten dari $\mathbb{Z}_6/I_1$ merupakan idempoten dari $\mathbb{Z}_6$.

Proposisi 3.1.7

Misalkan R suatu ring Abelian. Jika $N(R)$ merupakan suatu nil ideal dari R dan $[x, y]_k + N(R)$ merupakan reguler untuk setiap $x, y \in R$, maka R merupakan *strongly* k-Engel π-reguler.

Bukti:

Misalkan $x, y \in R$. Karena $[x, y]_k + N(R)$ merupakan reguler, maka terdapat $z \in R$ sedemikian sehingga

$$[x, y]_k + N(R) = [x, y]_k . z . [x, y]_k + N(R)$$

Akan ditunjukkan bahwa $z . [x, y]_k$ adalah elemen idempoten di R.

$$\begin{aligned} z . [x, y]_k + N(R) &= z . [x, y]_k . z . [x, y]_k + N(R) \\ &= z^2 . [x, y]_k^2 + N(R). \\ &= (z . [x, y]_k)^2 + N(R). \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.5, elemen $z . [x, y]_k \in Id(R)$, karena $z . [x, y]_k + N(R)$ merupakan elemen idempoten pada $R/R(N)$.
Misalkan $a = z . [x, y]_k \in Id(R)$ sedemikian sehingga

$$a + N(R) = z.[x,y]_k + N(R)$$

$$a - z.[x,y]_k = 0$$

Karena $a - z.[x,y]_k \in N(R)$, maka terdapat suatu bilangan bulat positif m sedemikian sehingga

$$(a - z.[x,y]_k)^m = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa $[x,y]_k - [x,y]_k.a$ merupakan elemen nilpoten

$$[x,y]_k + N(R) = [x,y]_k.z.[x,y]_k + N(R)$$

$$[x,y]_k + N(R) = [x,y]_k.a + N(R)$$

$$[x,y]_k - [x,y]_k.a = 0 \in N(R).$$

Terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= ([x,y]_k - [x,y]_k.a)^n \\ &= \left([x,y]_k.(1-a)\right)^n \\ &= [x,y]_k^n.(1-a)^n \\ &= [x,y]_k^n(1-a) \\ &= [x,y]_k^n - [x,y]_k^n.a \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler

$$\begin{aligned} [x,y]_k^n &= [x,y]_k^n.a = a.[x,y]_k^n \\ &= z.[x,y]_k.[x,y]_k^n \\ &= z.[x,y]_k^{n+1} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Contoh 3.1.8

Diberikan Ring Abelian $\mathbb{Z}_4$ yang bukan merupakan *strongly* k-Engel π-reguler dan $N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan nil ideal dari $\mathbb{Z}_4$. Akan ditunjukkan bahwa $[x,y]_k + N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ bukan merupakan ring reguler.

Jawab:
Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in [x, y]_k + N$.
Untuk $\bar{x} = \bar{0}$, terdapat $\bar{y} = \bar{0}$ sedemikian sehingga

$$\bar{x}\bar{y}\bar{x} = \bar{0}.\bar{0}.\bar{0} = \bar{0} = \bar{x}.$$

Untuk $\bar{x} = \bar{2}$, tidak terdapat $\bar{y}$ sedemikian sehingga $\bar{x}\bar{y}\bar{x} \neq \bar{x}$. Hal ini menunjukkan bahwa elemen $\bar{x} = \bar{2}$ bukan merupakan elemen reguler.
Karena terdapat elemen yang bukan merupakan elemen reguler, maka $[x, y]_k + N$ bukan merupakan ring reguler.

Proposisi 3.1.9
Misalkan R merupakan Ring Abelian. Jika R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler dan P merupakan ideal prima dari R, maka untuk setiap $x, y \in R$, $[x, y]_k + P$ merupakan nilpoten atau unit pada R/P.
Bukti:
Misalkan $a \in Id(R)$, u merupakan unit, dan $[x, y]_k = a.u$, sehingga

$$[x, y]_k^n = a^n.u^n$$
$$[x, y]_k^n = a.u^n$$

Karena $(1 - a)Ra = \{0\} \subseteq P$ dan P merupakan ideal prima, maka $a \in P$ atau $(1 - a) \in P$.

Untuk $a \in P$:

$$\begin{aligned} [x, y]_k^n + P &= a.u^n + P \\ &= (a + P)(u^n + P) \\ &= (u^n + P), \end{aligned}$$

sehingga $[x, y]_k + P = u + P$ merupakan unit di R/P.

Untuk $(1 - a) \in P$:

$$\begin{aligned} [x, y]_k^n + P &= a.u^n + P \\ &= (u^n - (1 - a)u^n) + P \\ &= (u^n + P) - \big((1 - a) + P\big)(u^n + P) \\ &= (u^n + P) - (u^n + P) \\ &= 0 + P \end{aligned}$$

$[x, y]_k + P = 0 + P$ merupakan nilpoten
Terbukti bahwa $[x, y]_k + P$ merupakan nilpoten atau unit di R/P.

Contoh 3.1.10
Diberikan ring Abelian $\mathbb{Z}_6$ dan ideal prima $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, $[x, y]_k + I_2$ merupakan nilpoten atau unit di $\mathbb{Z}_6/I_2$.
Jawab:
$[x, y]_k + I_2 = \{\bar{0} + I_2\}$.
$\mathbb{Z}_6/I_2 = \{\bar{0} + I_2, \bar{1} + I_2\}$.
Elemen identitas pada $\mathbb{Z}_6/I_2$ adalah $\bar{1} + I_2$.
Elemen unit pada pada $\mathbb{Z}_6/I_2$ adalah $\bar{1} + I_2$.
Elemen nilpoten pada pada $\mathbb{Z}_6/I_2$ adalah $\bar{0} + I_2$.
Terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, $[x, y]_k + I_2$ merupakan nilpoten atau unit di $\mathbb{Z}_6/I_2$.

Proposisi 3.1.11
Misalkan R suatu ring *strongly* k-Engel π-reguler. Jika I merupakan ideal dari R, maka I merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.
Bukti:
Misalkan $x, y \in I$. Karena R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler, maka terdapat $z \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$[x, y]_k^n = [x, y]_k^{n+1}.z, \text{ dan}$$
$$[x, y]_k^{n+1}.z = z.[x, y]_k^{n+1}.$$

Untuk $n = 1$. Misalkan $t = [x, y]_k.z^2 \in I$, dan $[x, y]_k.t = t.[x, y]_k$ sedemikian sehingga

$$[x, y]_k^n = [x, y]_k = [x, y]_k^2.z = z.[x, y]_k^2, \text{ dan}$$
$$\begin{aligned}[x, y]_k^{n+1}.t = [x, y]_k^2.t &= [x, y]_k^2.[x, y]_k.z^2 \\ &= [x, y]_k^2.z.z.[x, y]_k \\ &= \left([x, y]_k^2.z\right).z.[x, y]_k \\ &= [x, y]_k.z.[x, y]_k \\ &= [x, y]_k^2.z \\ &= [x, y]_k.\end{aligned}$$

Untuk $n \geq 2$. Misalkan $t = [x,y]_k^{n-1}.z^n \in I$, dan $[x,y]_k.t = t.[x,y]_k$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}[x,y]_k^n &= ([x,y]_k)^n \\ &= \left([x,y]_k^2.z\right)^n \\ &= [x,y]_k^{2n}.z^n \\ &= [x,y]_k^{n+1}.[x,y]_k^{n-1}.z^n \\ &= [x,y]_k^{n+1}.t\end{aligned}$$

Terbukti bahwa I merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Contoh 3.1.12

Diberikan $\mathbb{Z}_6$ suatu ring *strongly* k-Engel π-reguler dan $I_2 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa I_2 merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Jawab:

Pada I_2 berlaku sifat komutatif terhadap pergandaan, sehingga I_2 memenuhi kondisi k-Engel untuk setiap $x,y \in I_2$ dan k bilangan bulat positif. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa I_2 merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

Untuk $x \in I_2$, terdapat $y \in I_2$ dan bilangan bulat positif n, sehingga diperoleh sebagai berikut.

$x = \bar{0}$, $n = 1$ dan $y = \bar{0}$ sehingga $\bar{0}^1 = \bar{0}^2 \bullet \bar{0} = \bar{0} \bullet \bar{0}^2$

$x = \bar{2}$, $n = 2$ dan $y = \bar{4}$ sehingga $\bar{2}^2 = \bar{2}^3 \bullet \bar{4} = \bar{4} \bullet \bar{2}^3$

$x = \bar{4}$, $n = 1$ dan $y = \bar{4}$ sehingga $\bar{4}^1 = \bar{4}^2 \bullet \bar{4} = \bar{4} \bullet \bar{4}^2$.

Karena untuk setiap $x \in I_2$, terdapat $y \in I_2$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $x^n = x^{n+1}y = yx^{n+1}$, sehingga terbukti bahwa I_2 merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler.

BAB IV
PENUTUP

1.1 Kesimpulan

Dalam pembahasan pada skripsi ini diperoleh kesimpulan bahwa suatu nil ideal dari ring *strongly* k-Engel π-reguler merupakan suatu ring *strongly* k-Engel π-reguler. Sebaliknya, jika nil ideal dari suatu ring R merupakan reguler, maka ring R merupakan ring *strongly* k-Engel π-reguler. Diperoleh pula bahwa setiap ideal dari ring *strongly* k-Engel π-reguler merupakan *strongly* k-Engel π-reguler.

1.2 Saran

Adapun dalam skripsi ini, untuk penelitian lebih lanjut diharapkan dapat membahas lebih luas mengenai sifat-sifat dari ring *strongly* k-Engel π-reguler.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring Field dan Daerah Integral*. Universitas Brawijaya Press. Malang.

Azumaya, G. 1954. *Strongly π-regular Rings*. Hokkaido University. Vol 13:034-039.

Bresar, M. 2014. *Introduction to Noncommutative Algebra*. Springer. Switzerland.

Chin, A.Y.M. dan S. Sahebi. 2012. On Commutativity in Strongly k-Engel π-reguler Rings. *International Journal of Applied Mathematics*. Vol. 25:387-391.

Chin, A.Y.M. dan S. Sahebi. 2013. A Note on Abelian strongly k-Engel π-reguler Rings. *Mathematical Sciences*. Hal 1-3.

Ehrlich, G. 1991. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra.* PWS-KENT Publishing Company. Boston, Massachusetts.

Hillman, A.P. dan G.L. Alexanderson. 1994. *Abstract Algebra Fifth Edition*. PWS Publishing Company. Boston, Massachusetts.

Jacobson, N. 1951. *Lectures In Abstract Algebra I*. Springer Verlag. New York.

Tucci, R.P. 2000. *Central and Semicentral Idempotents*. Loyola University. New Orleans.